Ejercicios

Tema 6: Teorema de Green-Riemann

1. Hallar la integral curvilínea
$$\oint_\Gamma \left(x - y^3\right) dx + \left(x^3 + \operatorname{sen} y\right) dy$$
siendo Γ la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente.
Sol.: $\frac{3\pi}{2}$.

2. Calcular $\int_{\widehat{AB}} x\,dy - y\,dx$, siendo $A(a,0)$, $B(0,b)$, $(a,b>0)$:
   (a) sobre el arco de la curva $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ comprendido entre A y B.
   (b) sobre el segmento de extremos A y B.
   (c) Calcular el área limitada por las curvas anteriores.

   Sol.: (a) $\frac{ab\pi}{2}$; (b) ab; (c) $\frac{ab(\pi-2)}{4}$.

3. Aplicando el Teorema de Riemann, calcular la integral curvilínea
$$\int_\gamma e^{y^2}\,dx + (2xye^{y^2} + x + e^{y^3})\,dy$$
siendo γ la curva formada por el segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ y por el segmento que une los puntos $(1,1)$ y $(2,0)$.
Sol.: -1.

4. Calcular la integral:
$$\int_\gamma \frac{(x^3 + xy^2 + x)\,dy - (y^3 + yx^2 + y)\,dx}{x^2 + y^2}$$
donde γ es el arco de la curva $x^6 + y^6 = 5^6$ que está en el semiplano superior y que va de $B(5,0)$ a $A(-5,0)$.
Sol.: $\pi + \frac{50}{3}\beta\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$.

5. Calcular, aplicando el teorema de Riemann-Green en un contorno adecuado, la integral curvilínea:
$$\int_\gamma (x+1)e^{x+y}\,dx + x(1 + e^{x+y})\,dy$$
donde γ es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ comprendido en el primer y segundo cuadrantes.
Sol.: $\frac{\pi}{2} - \left(e + \frac{1}{e}\right)$.

6. Utilizando el teorema de Green-Riemann, hallar la integral curvilínea:
$$\int_\gamma (1+y)e^{x-y}\,dx + (x^5 - ye^{x-y})\,dy$$
donde γ es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente, comprendido en el primer cuadrante.
Sol.: $\frac{5\pi}{32} + 2e^{-1} - e$.

7. Utilizando el teorema de Green-Riemann, calcular:

$$I = \int_\gamma (f'(x)\,sen\,y - 3y)\,dx + (f(x)\cos y + 8x)\,dy$$

donde f es una fución con derivada continua en $\mathbb{R}$ y γ es una curva simple y suave a trozos que, sin cortar a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y estando por debajo de ella, une los puntos $O(0,0)$ y $A(\pi,\pi)$ y que cerrándola mediante el segmento $\overline{OA}$ determina un recinto de área S.
Sol.: $\frac{5\pi^2}{2} + 11S$.

8. Utilizando el teorema de Green-Riemann, calcular:

$$I = \int_\gamma \left(\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2} + y^2 x\right) dx + \left((x-1)y + \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right) dy$$

donde γ es el arco de la circunferencia $x^2+y^2=4$, orientado positivamente, que une los puntos $A(0,2)$ y $B(2,0)$ y no está comprendido en el primer cuadrante.
Sol.: $\frac{10}{3}$.

9. Hallar, utilizando el teorema de Green-Riemann, la integral curvilínea:

$$\int_\gamma (2xe^{x^2+2y^2} - y)\,dx + (4ye^{x^2+2y^2} + x^2)\,dy$$

donde γ es el contorno de la circunferencia unidad $x^2+y^2=1$, orientada positivamente, comprendido en el primer cuadrante.
Sol.: $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} + e(e-1)$.

10. Calcular, usando el teorema de Green-Riemann, la integral

$$I = \int_\gamma \left(\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-1)^2} - 2y\right) dx + \frac{y-1}{(x-2)^2+(y-1)^2}\,dy$$

donde γ es el arco de la elipse $4(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ comprendido en el primer cuadrante y que une los puntos $A(\frac{3}{2},0)$ y $B(2,2)$.
Sol.: $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{5} - \pi\right)$.

11. Hallar las integrales curvilíneas:

$$I_i = \int_{\gamma_i} \frac{[(x+y)\operatorname{sen} x + \cos x]\,dx + \left[x(x+y)^2 + \cos x\right]\,dy}{(x+y)^2}\ ,\quad i = 1,2$$

donde:

(a) γ_1 es el segmento que une los puntos $A(\pi,0)$ y $B(0,\pi)$.
(b) γ_2 es la curva de ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\pi}$ que une B con A.

Sol.: a) $I_1 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2}{\pi}$; b) $I_2 = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi^2}{6}$.

12. (**Febrero 1999**) Calcular la integral curvilínea

$$I = \int_\gamma \left(2xe^{x^2+2y^2} - y\right) dx + \left(4ye^{x^2+2y^2} + x^2\right) dy$$

donde γ es el arco de la curva $y = 2 - x^2$ que va desde el punto $A(1,1)$ hasta el punto $B(-1,1)$.
Sol.: $I = \frac{10}{3}$.

13. (**Septiembre 1999**) Calcular la integral:

$$I = \int_\gamma \left(\frac{x}{x^2 + (2y-1)^2} + y^2\right) dx + \left(\frac{2(2y-1)}{x^2 + (2y-1)^2} + x(2y-1)\right) dy$$

donde γ es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que, en el primer cuadrante, va desde $A(1,0)$ hasta $B(0,1)$.
Sol.: $I = -\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.